NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	CARRERA:
Firma		

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serÃ¡n corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en **SU** sección.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus celulares.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIóN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 puntos]** Considere la transformación lineal definida por:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, 2x-y-2z, x+y-3z) \end{array}$$

a) Determinar el núcleo de T, y $\rho(T)$

SOLUCIÓN:

$Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (0,0,0)\}$ Es decir tenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{array}\right|$

Resolviendo tenemos que:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{13}(-1)]{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} 3y & = & 4z \\ x-2y+z & = & 0 \end{array}$$

Es decir $y = \dfrac{4z}{3}$, $x = \dfrac{5z}{3}$, Por lo que $\boxed{Ker(T) =< (5/3, 4/3, 1) >}$

5 puntos

Para la imagen tenemos que:

$T(x,y,z) = x(1,2,1) + y(-2,-1,1) + z(-2,-1,1)$
Es decir la $Img(T) =< (1,2,1), (-2,-1,1), (-2,-1,1) >$ Pero claramente estos vectores son L.D. Por lo que $Img(T) =< (1,2,1), (-2,-1,1) >$. Luego $\boxed{\rho(T) = 2}$

5 puntos

b) Hallar $m \in \mathbb{R}$, si existe, tal que $(1,m,2)$ pertenezca al subespacio Imagen de T (o, al recorrido de T).
SOLUCIÓN:

$(1,m,2) \in Img(T) \Longleftrightarrow (1,m,2) = \alpha(1,2,1) + \beta(-2,-1,1)$ Tenemos el sistema $\left.\begin{array}{r} \alpha-2\beta=1 \\ 2\alpha-\beta=m \\ \alpha+\beta=2 \end{array}\right|$

Resolviendo $\boxed{m=3}$

10 puntos

UTALCA

IMAFI

2) **[20 puntos]** En la Universidad de Talca, se dicta un curso que tiene dos secciones (A y B). Se estima que por motivos de afinidad, cada semana, uno de cada diez estudiantes de la sección A se cambia a la B y viceversa, dos de cada diez abandonan la sección B y se pasan a la sección A.

Primero vamos a diagonalizar la matriz de transición $\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 0{,}9-\lambda & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7 = (\lambda-1)(\lambda-0{,}7) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0{,}7$ Son los valores propios.

Para $\lambda_1 = 1$ tenemos que

$$\left[\begin{array}{rr|r} -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{rr|r} -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v_1 = (2,1)$$

Para $\lambda_2 = 0{,}7$ tenemos que

$$\left[\begin{array}{rr|r} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{rr|r} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v_2 = (1,-1)$$

5 puntos

Luego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5 puntos

a) Encuentre A^n
SOLUCIÓN:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0{,}7)^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(0{,}7)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0{,}7)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(0{,}7)^n \end{bmatrix}$$

5 puntos

b) ¿Que sucede a largo plazo, sabiendo que hoy la mitad prefiere a la sección A y la otra mitad a la sección B?
SOLUCIÓN:

$$X_\infty = (\lim_{k\to\infty} A^k) \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Es decir dos de cada tres alumnos prefieren la sección A y 1 de cada 3 prefiere la B.

5 puntos

3) **[20 puntos]** Sea $\mathcal{B} = \{x, x+1, x^2\}$ una base de $\mathcal{P}_2[x]$, y sea $T : \mathcal{P}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

$$\begin{aligned} T(x) &= (1,2,0) \\ T(x+1) &= (3,4,5) \\ T(x^2) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

a) Hallar $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$, donde $\mathcal{B}_2$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

SOLUCIÓN:

Claramente $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

5 puntos

b) Hallar $T(2x^2 - 3x + 5)$

SOLUCIÓN:

Tenemos que :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (b-c)x + c(x+1) + ax^2 \quad \text{entonces} \\ 2x^2 - 3x + 5 &= -8x + 5(x+1) + 2x^2 \\ T(2x^2 - 3x + 5) &= -8T(x) + 5T(x+1) + 2T(x^2) \\ &= -8(1,2,0) + 5(3,4,5) + 2(1,0,0) \\ &= (9,4,25) \end{aligned}$$

5 puntos

c) ¿Es T un isomorfismo? Justifique su respuesta

Sí es isomorfismo. Ya que $\rho(T) = 3$ por lo que es EPIMORFISMO y por el teorema de la dimensión tenemos que $\eta = 0$ por lo que T es un MONOMORFISMO, Luego es un ISOMORFISMO

5 puntos

d) Hallar $T^{-1}(1,2,15)$ Tenemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (b-c)x + c(x+1) + ax^2 \quad \text{entonces} \\ T(ax^2 + bx + c) &= (b-c)T(x) + cT(x+1) + aT(x^2) \\ &= (a+b+2c, 2b+2c, 5c) \end{aligned}$$

Es decir tenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} a+b+2c=1 \\ 2b+2c=2 \\ 5c=15 \end{array}\right|$ Resolviendo $c=3$, $b=-2$, $a=-3$ es decir:

$$T^{-1}(1,2,15) = -3x^2 - 2x + 3$$

5 puntos